ПРОЛЕТНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

Шумен, 29.03-31.03.2019 година

Б Р О Ш У Р А

VI клас

6.1. Два правоъгълни паралелепипеда са долепени един до друг, като новия правоъгълен паралелепипед е с размери 3 *cm*, 4 *cm* и 12 *cm*. Общата стена на паралелепипедите е с размери 3 *cm* и 4 *cm*. Да се намери отношението на обема на по-големия паралелепипед към обема на по-малкия паралелепипед, ако повърхнината на по-големия е два пъти по-голяма от повърхнината на по-малкия.

Решение: Нека размерите на получен ите паралелепипеди са 3, 4, x и 3, 4, 12 – x, като първият има по-голяма повърхнина. Тогава ще имаме, че повърхнината на първият ще е $24 + 14.x$, а на вторият $24 + 14(12 - x) \Rightarrow 24 + 14.x = 48 + 28(12 - x) \Rightarrow x = \frac{60}{7}$

Тогава отношението на обемите ще бъде $\frac{3.4.x}{3.4.(12-x)} = \frac{5}{2}$.

Оценяване: 1 **точка** за означаване, по **1 точка** за изразяване на двете повърхнини, 1 **точка** съставяне на за уравнение, 1 точка за намиране на неизвестното и 1 точка за отговор.

6.2. Намерете всички двойки трицифрени числа, сборът на които се дели на 296, а частното им е кратно на 3.

Решение: Нека двете числа са a и b. От условието $\frac{a}{b} = 3.k$ и $\frac{a+b}{296} = p \Rightarrow 100 \leq a = 3kb < 1000 \Rightarrow 0 < k \leq 3$ и $b \leq 333 \Rightarrow \frac{a+b}{296} < \frac{1333}{296} < 5 \Rightarrow 0 < p \leq 4$

1. сл. $k = 1, a = 3b, a + b = 4b = 296p$ намираме $b = 74p,\ a = 222p$ и $100 \leq b < a < 1000$, получаваме $2 \leq p \leq 4$.

Намираме три решения:

- при $p = 2, b = 148, a = 444$
- при $p = 3, b = 222, a = 666$
- при $p = 4, b = 296, a = 888$.

2. сл. $k = 2, a = 6b, a + b = 7b = 296p, 7$ не дели $296 \Rightarrow 7$ дели p, но $p \leq 4 \Rightarrow$ няма решение.

3. сл. $k = 3, a = 9b, a + b = 10b = 296p, 5$ не дели $296 \Rightarrow 5$ дели p, но $p \leq 4 \Rightarrow$ няма решение.

Оценяване: За разглеждане на 1сл. **2 точки**, за 2 сл. **2 точки** и за 3 сл. **2 точки**. Ако е пропуснат само един случай се дават не повече от 4 точки.

6.3. Ако числото 2^{2019} е n-цифрено, а числото 5^{2019} е m-цифрено, намерете стойността на $n + m$.

Решение: Нека $a = 2^{2019}$ и $b = 5^{2019}$. Тогава са изпълнени неравенствата:

$10^{n-1} < a < 10^n$ и $10^{m-1} < b < 10^m \Rightarrow 10^{n+m-2} < a.b < 10^{n+m}$

Но $a.b = 2^{2019}.5^{2019} = 10^{2019} \Rightarrow n + m - 2 < 2019 < n + m \Rightarrow n + m = 2020$

Оценяване: 2 **точки** за $10^{n-1} < a < 10^n$ и $10^{m-1} < b < 10^m$, 2 **точки** за $10^{n+m-2} < a.b < 10^{n+m}$, 2 **точки** за $n + m - 2 < 2019 < n + m$ и **1 точка** за отговор.

6.4. Числата от 1 до N са написани едно след друго в редица. На всеки ход изтриваме първото число, а второто го местим в края на редицата. Намерете последното число, което ще остане при: **А)** $N = 23$ **Б)** $N = 2019$

Пример: От редицата 1, 2, 3, 4, 5 след първия ход ще получим редицата 3, 4, 5, 2.

Решение: Ако N е четно ($N = 2k$),то след k хода ще остане редицата 2, 4, 6,...., $2.k \Rightarrow$ ако N е степен на 2, то накрая остава N. Нека m е числото, което е степен на 2, по – малко е от N и е възможно най – голямо. Тогава след $N - m$ хода ще останат m числа $\Rightarrow$ последното, което е $2.(N - m)$ ще остане накрая.

А) Най-близкото число, което е степен на 2 до 23 е 16. Тогава след $23 - 16 = 7$ хода ще останат 16 числа, като последното ще е $14 \Rightarrow 14$ ще остане накрая.

Б) Най-близкото число, което е степен на 2 до 2019 е 1024. Тогава след $2019 - 1024 = 995$ хода ще останат 1024 числа, като последното ще е $1990 \Rightarrow 1990$ ще остане накрая. *Оценяване*:

А) **2 точки** **Б)** **5 точки**

2 точки за обосноваване, че ако N е степен на 2, то накрая остава N, **1 точка** за избор на m, **1 точка** за след $N - m$ хода ще останат m числа, **1 точка** за $2.(N - m)$ ще остане накрая и по **1 точка** за отговор на **А)** и **Б)**.