VII клас

Задача 7.1. Двама туристи тръгнали едновременно един срещу друг от хижите A и B по туристическа пътека и се срещнали в 11:54 ч. Без да спират, те продължили пътя си и туристът, който тръгнал от хижа A, пристигнал в B в 12:30 ч., а другият пристигнал в хижа A в 15:39 ч. Ако туристите са се движили с постоянни скорости, намерете:

А) в колко ча́са те са тръгнали от хижите;

Б) отношението на скоростите им.

РЕШЕНИЕ:

Да означим мястото на срещата с C, скоростта на туриста, тръгнал от A, с v *km/h* и скоростта на туриста, тръгнал от B, с w *km/h*.

Времето, за което първият турист е изминал пътя от C до B, е 12:30 – 11:54 = 36 min = $\frac{3}{5}$ h,

а разстоянието $BC = \frac{3}{5}v$. **1 точка**

Времето на втория турист от C до A е 15:39 – 11:54 = 3 h 45 min = $\frac{15}{4}$ h, а разстоянието

$AC = \frac{15}{4}w$. **1 точка**

От друга страна, ако времето на всеки турист до срещата е t, то са в сила равенствата

$AC = v.t, BC = w.t$ **1 точка**

Приравняваме: $wt = BC = \frac{3}{5}v \Rightarrow \frac{v}{w} = \frac{15}{4t} \Rightarrow vt = AC = \frac{15}{4}w \Rightarrow \frac{v}{w} = \frac{5t}{3}$

Тогава $\frac{5t}{3} = \frac{15}{4t}$, т.е. $4t^2 = 9$. **2 точки**

От $(2t - 3)(2t + 3) = 0$ получаваме единствено положително решение $t = \frac{3}{2} =$ 1 h 30 min.

Следователно туристите са тръгнали от хижите в 10:24 ч. **1 точка**

Отношението на скоростите им е $\frac{v}{w} = \frac{15}{4.\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}$. **1 точка**

<u>Задача 7.2</u> Даден е правоъгълникът $ABCD$. Точките P и Q са от страните му BC и CD съответно, като $\sphericalangle AQP = 90°$. Върху продълженията на страните AD и CD са взети съответно точките M и N, така че $DM = CQ$ (D е между A и M) и $DN = CP$ (D е между C и N).

А) Докажете, че $S_{ABCD} = BP.DQ + QP.AQ$.

Б) Докажете, че правите AQ и MN са успоредни.

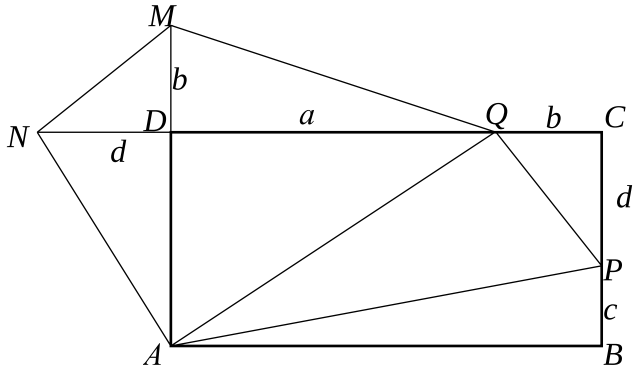
РЕШЕНИЕ:

А) Нека $DQ = a$, $CQ = DM = b$, $BP = c$, $CP = ND = d$. Тогава $BP \cdot DQ = ac$ и

$QP \cdot AQ = 2S_{APQ} = 2(S_{ABCD} - S_{ABP} - S_{ADQ} - S_{CPQ}) =$

$2(a+b)(c+d) - (a+b)c - a(c+d) - bd = ad + bc + bd$. **2 точки**

Накрая $S_{ABCD} = (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd = BP \cdot DQ + QP \cdot AQ$. **1 точка**



чертеж – 1 точка

Б) От Питагоровата теорема за триъгълниците ADQ, CPQ и ABP изразяваме:

$AQ^2 = (c + d)^2 + a^2$, $PQ^2 = b^2 + d^2$ и $AP^2 = (a + b)^2 + c^2$.

От Питагорова теорема за правоъгълния триъгълник APQ получаваме, че:

$(c + d)^2 + a^2 + b^2 + d^2 = (a + b)^2 + c^2$, т.е. $2d^2 + 2cd = 2ab$.

От $d(c + d) = ab$, следва, че $S_{ADN} = S_{QDM}$. **2 точки**

Тогава $S_{ADN} + S_{ADQ} = S_{QDM} + S_{ADQ}$, откъдето $S_{ANQ} = S_{AMQ}$. Но триъгълниците ANQ и AMQ имат обща основа AQ и щом лицата им са равни, височините от точките M и N към AQ са равни. Следователно правите AQ и MN са успоредни. **1 точка**

Задача 7.3. В клуба по танци членуват общо 19 младежи и девойки. На първия танц на дансинга танцуват младеж и девойка, а останалите чакат на опашка. На всеки следващ танц първият от опашката сменя танцуващия от същия пол, а смененият отива отзад на опашката. Докажете, че все някога всеки от младежите ще танцува с всяка от девойките.

РЕШЕНИЕ:

Без да ограничаваме общността, приемаме че броят на девойките m е по-голям от броя на младежите n. Да ги номерираме, започвайки от тези на дансинга, и продължавайки по реда им на опашката: девойките $Д_1$, $Д_2$, …, $Д_m$; младежите $М_1$, $М_2$, …, $М_n$. Две наблюдения:

I. Цикличният ред (започвайки с първия танцьор на дансинга, втория на дансинга и продължавайки по реда в опашката) се запазва във всяка от групите Д и М след всеки танц (полагаме $Д_{m+k}= Д_k$; $М_{n+k} = М_k$).

II. Младеж и девойка могат да си сменят цикличния ред на опашката, но само непосредствено след като са танцували един с друг.

Групираме танците в последователности от 17 танца. След първата група първите 17 младежи и девойки, без $Д_m$ и $М_n$, са били на дансинга по веднъж (според I). Следователно тази двойка стартира втората група от 17 танца. Аналогично, $Д_{m-1}$ и $М_{n-1}$ стартират третата група от 17 танца и т.н. По този начин всяка девойка отива в края на опашката точно $m-1$ пъти по време на m групи, също така точно $n(m-1)$ пъти по време на nm групи от 17 танца. Аналогично, всеки младеж отива в края на опашката точно $m(n-1)$ пъти по време на nm групи от 17 танца. Имаме $n(m-1) - m(n-1) = m - n \geq 1,$ значи след $2nm$ групи ще има двойно по-голяма разлика на отиванията в края на опашката за всяка от девойките спрямо всеки от младежите, т.е. тази разлика ще стане поне 2. Нареждането в края на опашката означава, че преди това танцьорът е бил на дансинга.

Да допуснем, че някой младеж М никога не танцува с девойката Д. Тогава след $2nm$ групи от 17 танца Д ще има поне с две появявания на опашката повече от М. Това означава, че Д е имала поне две последователни излизания на дансинга повече от М. Значи има две такива последователни излизания на дансинга за Д, между които М не е излизал да танцува. Но след първото от тези излизания на Д и последвалото нареждане на опашката, М е преди Д, а непосредствено преди второто ѝ излизане М е след нея. Противоречие с (II).

7 точки (За частични резултати се дават до ***4 точки***, в зависимост от това доколко идеята може да доведе до пълно решение. Например, ако се разгледа частен случай с един младеж или се приеме, че на опашката са първо само младежи, после само девойки. Ако само се допусне противното, без повече смислени разсъждения – ***1 точка***.)