ПРОЛЕТНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

Шумен, 29.03-31.03.2019 година

Б Р О Ш У Р А

VII клас

7.1. Даден е многочлена $P(x)=x^4 + 6x^3 + x^2 + ax + b$. При кои цели стойности на a и b многочленът $P(x)$ е точен квадрат? Решете уравнението $P(x)=0$ за намерените стойности на a и b.

Решение: Без ограничение на общността може да приемем, че точният квадрат има вида $(x^2 + mx + n)^2$.

Нормалният вид на този израз е $x^4 + 2mx^3 + (m^2 + 2n)\,x + 2mnx + n^2$. **(1 т.)** Приравняваме коефициентите пред съответните степени и последователно намираме:

x^3: $2m = 6 \Rightarrow m = 3$;

x^2: $m^2 + 2n = 1 \Rightarrow 9 + 2n = 1 \Rightarrow n = -4$;

x: $a = 2mn \Rightarrow a = -24$;

свободен член: $b = n^2 \Rightarrow b = 16$. **(2 т.)**

За $a = -24$ и $b = 16$ многочленът $P(x)$ е тъждествено равен на $(x^2 + 3x - 4)^2$. **(1 т.)**

Разлагаме на множители $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$, откъдето

$P(x) = (x^2 + 3x - 4)^2 = (x + 4)^2 (x - 1)^2$. **(1 т.)**

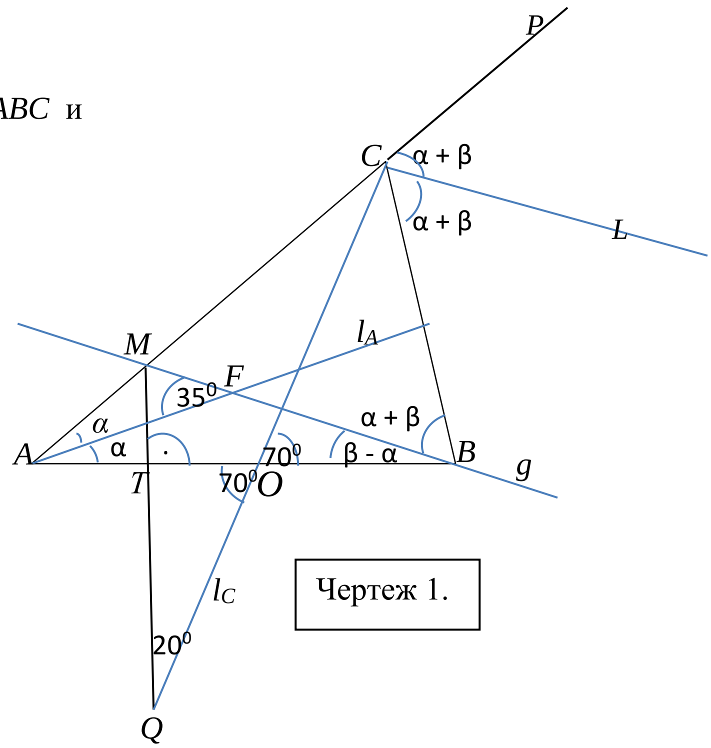
Корените на уравнението $P(x) = 0$ намираме от $(x + 4)(x - 1) = 0$:

$x_1 = -4,\ x_2 = 1$. **(1 т.)**

7.2. В разностранния ΔABC ($AC > BC$) са построени ъглополовящата l_A на $\sphericalangle BAC$, ъглополовящата l_C на $\sphericalangle BCA$ и ъглополовящата CL на външния ъгъл при върха C. През върха B е построена права g, успоредна на CL. Правата g пресича AC в точка M. Ъглополовящата l_C и перпендикулярната права от точка M към AB се пресичат в точка Q. Ъглополовящата l_A пресича правата g в точка F. Намерете мерките на ъглите на ΔABC, ако $\sphericalangle AFM = 35°$ и $\sphericalangle MQC = 20°$.

Решение: Нека $\sphericalangle BAC = 2\alpha$, а $\sphericalangle ABC = 2\beta$.

Тогава $\sphericalangle BCP = 2\alpha + 2\beta$, като външен ъгъл на ΔABC и $\sphericalangle BCL = \sphericalangle PCL = \alpha + \beta$. (1 т.)



Чертеж 1.

От успоредността на правите CL и g следва, че $\sphericalangle MBC = \sphericalangle BCL = \alpha + \beta$. (1 т.)

От ΔTQO – правоъгълен, $\sphericalangle TOQ = 70°$. $\sphericalangle COB = \sphericalangle TOQ = 70°$ (връхни). (1 т.)

Ако $AC > BC$, то точка M е вътрешна за отсечката AC ($\alpha + \beta < 2\beta$). (1 т.)

$\sphericalangle MBA = \sphericalangle ABC - \sphericalangle MBC = 2\beta - (\alpha + \beta) = \beta - \alpha$

$\sphericalangle MFA = \sphericalangle FAB + \sphericalangle FBA$ (външен за ΔFAB),

$35° = \alpha + \beta - \alpha,\ \beta = 35°$ и тогава $\sphericalangle ABC = 2\beta = 70°$. (1 т.)

В ΔCOB $\sphericalangle OCB = 180° - 140° = 40°$. Следователно $\sphericalangle ACB = 80°,\ \sphericalangle BAC = 30°$. (1 т.)

7.3. Ливадата на фермера А е 4 *дка*. Сеното, събрано от тази ливада, стигнало на А да изхранва 3 крави в продължение точно на 8 месеца. Фермерът Б има ливада от 10 *дка*. Колко най-много кози може да изхранва Б в продължение на 6 месеца със сеното от ливадата си, ако Б е събрал с 20% повече сено от декар в сравнение с добива на А от декар и месечно изхранването на 9 кози е колкото изхранването на 4 крави? Продължителността на месеците не се взима под внимание.

Решение: Нека една крава на А месечно се нуждае от a *кг* сено. Тогава кравите на А общо са консумирали $8.3a = 24a$ *кг*, които били осигурени от сеното на А от 4 *дка*. **(2 т.)**

Следователно от един декар на А се получават $6a$ *кг*. Сеното на Б е с 20% повече, значи от един декар ще се получават $1{,}2.6a = 7{,}2a$ *кг*, а от цялата ливада Б ще си осигури $10.7{,}2a = 72a$ *кг*, което означава, че Б ще разполага с по $72a : 6 = 12a$ *кг* сено за всеки от шестте месеца.

(2 т.)

Отчитаме, че 9 кози месечно потребяват толкова, колкото 4 крави, откъдето намираме, че месечно една коза се нуждае от $\frac{4}{9}a$ *кг*. Тогава сеното на Б ще стига точно за $12a : \left(\frac{4}{9}a\right) = 27$ кози. **(3 т.)**

7.4. Двадесет войници са строени в редица. Всеки войник освен първият съобщава на старшината разликата от броя на приятелите си в ляво от него и броя на приятелите си в дясно от него (числата са цели числа от интервала [–19; 19]). Приятелството е взаимно: ако *A* е приятел на *B*, то *B* е приятел на *A*. Докажете, че старшината би могъл сам да определи броя на приятелите на първия войник.

Решение: Нека за войника $Х_n$ означим с $Л_n$ броя на приятелите му в ляво от него и с $Д_n$ – броя на приятелите му в дясно от него. Очевидно $Д_1 = 0$ и $Л_{20} = 0$. **(1 т.)**

Нека си представим, че всеки двама приятели държат въже.

Сумата $Д_1 + Д_2 + \ldots + Д_{20}$ е равна на броя на въжетата, като сме преброили въжетата по единия им край.

Сумата $Л_1 + Л_2 + \ldots + Л_{19} + Л_{20}$ е равна на броя на същите въжета, преброени по другия им край. Тогава $Л_1 + Л_2 + \ldots + Л_{20} = Д_1 + Д_2 + \ldots + Д_{20}$. **(5 т.)**

Оттук $Д_{20} = Л_1 + (Л_2 - Д_2) + \ldots + (Л_{19} - Д_{19})$. **(1 т.)**