



РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ  
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

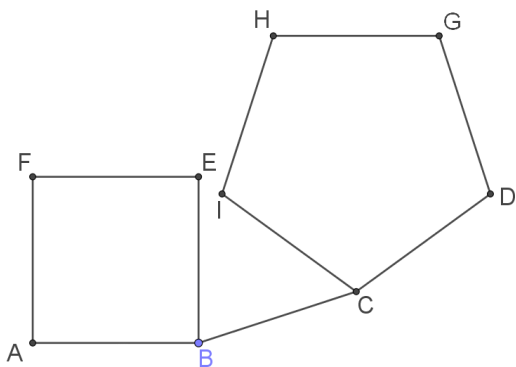
НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

НАЦИОНАЛЕН КРЪГ – 13 април 2019 г.

ТЕМА ЗА VII КЛАС

**7.1.** Точките  $A, B, C, D$  са последователни върхове на правилен двадесетоъгълник. Вътрешно за двадесетоъгълника са построени квадратът  $ABEF$  и правилният петоъгълник  $CDGHI$ . Докажете, че  $E$  лежи на правата  $CI$ .

*Решение.* Ще докажем, че  $\sphericalangle BCI = \sphericalangle BCE$ , с което задачата ще бъде решена.



Чертеж 1 точка

Първо намираме  $\sphericalangle DCI$ . Прекарваме диагоналите на петоъгълника през  $C$ . Сборът от ъглите на  $CDGHI$  е равен на сбора от ъглите на триъгълниците  $CEH$ ,  $CHG$  и  $CGD$ , значи е  $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ . Тогава  $\sphericalangle DCI = 540^\circ : 5 = 108^\circ$ . **1 точка**

Сега ще пресметнем  $\sphericalangle ABC$ . Прекарваме всички диагонали на двадесетоъгълника през  $A$ . Те разделят двадесетоъгълника на 18 триъгълника. Сборът от ъглите на двадесетоъгълника е равен на сбора от ъглите на тези триъгълници, значи е  $18 \cdot 180^\circ = 3240^\circ$ .

Тогава  $\sphericalangle ABC = 3240^\circ : 20 = 162^\circ$ . **2 точки**

Отгук намираме  $\sphericalangle BCI = \sphericalangle BCD - \sphericalangle DCI = \sphericalangle ABC - \sphericalangle DCI = 162^\circ - 108^\circ = 54^\circ$ .

Също така  $\sphericalangle CBE = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABE = 162^\circ - 90^\circ = 72^\circ$ . **2 точки**

По-нататък, тъй като страната на квадрата е равна на страната на двадесетогълника, имаме  $BE = BC$ , т.е. триъгълникът  $BCE$  е равнобедрен. Следователно

$$\sphericalangle BCE = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle CBE) = \frac{1}{2}(180^\circ - 72^\circ) = 54^\circ, \text{ с което задачата е решена. } \mathbf{1 \text{ точка}}$$

**7.2.** На всеки километър по магистралата, ако пътуваме от Я до Б, между двете ленти за движение има табела, на която от едната страна пише колко километра ни остават до Б, а от другата страна на табелата пише колко километра сме изминали от Я. Сумата от цифрите на числата, написани от двете страни на всяка табела, е равна на 17. Намерете колко километра е разстоянието по магистралата между Я и Б.

*Решение.* Разстоянието ЯБ по магистралата е по-малко от 100 км. Наистина, в противен случай на табелата, стояща на 89-я километър, ще пише 89 (от едната страна) и още някакво число (от другата страна). Сумата на цифрите на такава табела би била по-голяма от 17 – противоречие. Така получихме, че разстоянието е не по-голямо от 89 км. **2 точки**

Разстоянието ЯБ е по-голямо от 10 км, защото иначе ще има табели с по една цифра от всяка страна и със сбор на двете цифри, който е по-малък от 11, и значи е по-малък от 17. Следователно на магистралата има табела, на която от едната страна пише 10. От другата страна на тази табела стои число със сбор от цифрите 16. Най-малкото такова число е 79. Следователно разстоянието ЯБ е по-голямо или равно на 89 км. **2 точки**

Вече установихме, че разстоянието ЯБ не може да е по-голямо от 89 км, значи остава да е точно 89 км. **1 точка**

Сега ще проверим, че всички табели по пътя имат сума от цифрите 17. Нека  $\overline{ab}$  е числото с цифри  $a$  и  $b$  от едната страна на табела. От  $\overline{ab} \leq 89$  следва  $a \leq 8$  и  $b \leq 9$ . Значи от другата страна на тази табела ще стои числото  $89 - \overline{ab} = \overline{cd}$ , като  $c = 8 - a$  и  $d = 9 - b$ . Така сборът от цифрите на табелата е

$$a + b + c + d = a + b + (8 - a) + (9 - b) = 17. \mathbf{2 \text{ точки}}$$

**7.3.** Разглеждаме множеството от естествените числа със сбор от цифрите 12 и такива, че в десетичния им запис не участват други цифри освен 1, 2 и 3. Каква е вероятността в записа на случайно избрано число от това множество да не участва цифрата 3?

*Решение.* Означаваме с  $X_n$  множеството от естествените числа със сбор от цифрите  $n$  и такива, че в десетичния им запис не участват други цифри освен 1, 2 и 3. Нека  $x_n$  е броят на елементите на  $X_n$ . Имаме

$$X_1 = \{1\} \Rightarrow x_1 = 1; X_2 = \{11; 2\} \Rightarrow x_2 = 2; X_3 = \{111; 12; 21; 3\} \Rightarrow x_3 = 4.$$

Нека  $n > 3$  и  $\overline{Aa} = 10A + a \in X_n$ . Очевидно

$$a = 1 \Leftrightarrow A \in X_{n-1}; \quad a = 2 \Leftrightarrow A \in X_{n-2}; \quad a = 3 \Leftrightarrow A \in X_{n-3}.$$

Това означава, че  $X_n = \{\overline{A1}: A \in X_{n-1}\} \cup \{\overline{A2}: A \in X_{n-2}\} \cup \{\overline{A3}: A \in X_{n-3}\}$ . При това различните стойности на  $a$  ни гарантират, че трите съставляващи множества са две по две непресичащи се. Очевидно за броя на елементите на тези множества имаме

$$|\{\overline{A1}: A \in X_{n-1}\}| = x_{n-1}; \quad |\{\overline{A2}: A \in X_{n-2}\}| = x_{n-2}; \quad |\{\overline{A3}: A \in X_{n-3}\}| = x_{n-3}.$$

Следователно  $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}$ . Последователно пресмятаме

$$x_4 = x_3 + x_2 + x_1 = 4 + 2 + 1 = 7;$$

$$x_5 = x_4 + x_3 + x_2 = 7 + 4 + 2 = 13;$$

$$x_6 = x_5 + x_4 + x_3 = 13 + 7 + 4 = 24;$$

$$x_7 = x_6 + x_5 + x_4 = 24 + 13 + 7 = 44;$$

$$x_8 = x_7 + x_6 + x_5 = 44 + 24 + 13 = 81;$$

$$x_9 = x_8 + x_7 + x_6 = 81 + 44 + 24 = 149;$$

$$x_{10} = x_9 + x_8 + x_7 = 149 + 81 + 44 = 274;$$

$$x_{11} = x_{10} + x_9 + x_8 = 274 + 149 + 81 = 504;$$

$$x_{12} = x_{11} + x_{10} + x_9 = 504 + 274 + 149 = 927.$$

Така намерихме, че броят на всевъзможните изходи е 927.

**3 точки**

За благоприятните изходи разсъжденията са аналогични. Разглеждаме множеството  $Y_n$  от естествените числа със сбор от цифрите  $n$  и такива, че в десетичния им запис не участват други цифри освен 1 и 2. Ако  $y_n$  е броят на елементите на  $Y_n$ , то

$$Y_1 = \{1\} \Rightarrow y_1 = 1; \quad Y_2 = \{11; 2\} \Rightarrow y_2 = 2.$$

За  $n > 2$  имаме  $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$ . Сега последователно намираме

$$y_3 = 3; \quad y_4 = 5; \quad y_5 = 8; \quad y_6 = 13; \quad y_7 = 21; \quad y_8 = 34; \quad y_9 = 55; \quad y_{10} = 89; \quad y_{11} = 144;$$

$$y_{12} = 233. \quad \text{Значи благоприятните изходи са 233.}$$

**3 точки**

Окончателно, търсената вероятност е  $\frac{233}{927} \approx 0,25$ .

**1 точка**

*Забележка.* Обосновката на рекурентните връзки трябва да са строги, например, защо са непресичащи се съставляващите множества. Приближената стойност не е задължителна. Ако се предложи комбинаторно решение, за пълен брой точки трябва да са разгледани прецизно всички случаи.