Математически турнир „Иван Салабашев“, 2019 г.
Решения на задачите от темата за 10-12 клас

Задача 1. Какви отрицателни стойности може да приема произведението на различните реални корени на уравнението

$$(ax^2+2bx+c)(bx^2+2cx+a)(cx^2+2ax+b)=0,$$

където $a,b,c>0$?

Решение. Първо да забележим, че реалните корени на уравнението са отрицателни. Следователно произведението на различните такива е отрицателно, ако те са един, три или пет.
В третия случай и трите уравнения

$$ax^2+2bx+c=0,\ bx^2+2cx+a=0\ cx^2+2ax+b=0,$$

имат реални корени, а в първия случай те имат най-много по един различен реален корен. Това води до

$$b^2 \geq ca,\ c^2 \geq ab,\ a^2 \geq bc \text{ или } b^2 \leq ca,\ c^2 \leq ab,\ a^2 \leq bc.$$

Като умножим тези неравенства почленно, и в двата случая следва, че те са равенства. Тогава $a^3=b^3=c^3=4abc$, т.е. $a=b=c$. Тогава -1 е двоен корен и на трите уравнения.
Във втория случай, ако различните реални корени са три, x_1,x_2,x_3, то те са корени на две от уравненията, като са възможни са два подслучая.
В първия подслучай можем да считаме, че уравнението $ax^2+2bx+c=0$ има двоен корен x_3. Тогава $b^2=ca$ и $x_3=-\sqrt{c/a}$. От друга страна, $x_1x_2=a/b$ или $x_1x_2=b/c$. Следователно $x_1x_2x_3=-\sqrt{ca/b^2}=-1$ или $x_1x_2x_3=-\sqrt{b^2/ac}=-1$
Във втория подслучай можем да считаме, че x_1 и x_2 са корени на уравнението $ax^2+2bx+c=0$, а x_1 и x_3 – на $bx^2+2cx+a=0$. Тогава

$$x_1+x_2=-2b/a,\ x_1x_2=c/a,\ x_1+x_3=-2c/b,\ x_1x_3=a/b,$$

откъдето

$$0=2x_2x_2x_1x_3+x_1+x_3=2x_1^2x_3\left(-x_1-\frac{2}{x_1x_3}\right)=-3x_1-2x_1^3x_3+x_3.$$

Следователно $x_3=\dfrac{3x_1}{1-2x_1^3}$ и значи

$$x_1x_2x_3=-2-x_1^2x_3=-2+\frac{3t}{1+2t}=f(t),$$

където $t=-x_1^3$. Да отбележим, че за всяко $t\in\Delta=(0,1)\cup(1,+\infty)$ случаят, който разглеждаме, се реализира. Лесно се вижда, че

$$\{f(t):t\in\Delta\}=(-2,-1)\cup(-1,-1/2).$$

И така, отговорът е $(-2,-1/2)$.
Оценяване. По 1 т. за първия и третия случай, и 2/3 т. за първия/втория подслучай.

Задача 2. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, за който лъчите $AD^{\rightarrow}$ и $BC^{\rightarrow}$ се пресичат в точка E така, че $AE = BD = CE$. Диагоналът BD пресичаната описаната окръжност около $\triangle ACE$ в точка P, а правата EP пресича описаната окръжност около $\triangle BDE$ в точка Q. Да се докаже, че $BQ + DQ = EP$.

Решение. Нека т. R върху правата DQ е такава, че $BQ = RQ$ и Q е между D и R. Понеже $BD = CE$, $\sphericalangle BDR = \sphericalangle CEP$ и

$$2\sphericalangle BRD = \sphericalangle BQD = 180^\circ - \sphericalangle AEC = 2\sphericalangle CAE = 2\sphericalangle CPE,$$

то $\triangle BDR \cong \triangle CEP$. Следователно $BQ + DQ = DR = EP$.

Оценяване. 2 т. за т. R, 4 т. за $\triangle BDR \cong \triangle CEP$ и 1 т. за заключение.

Задача 3. Дадено е естествено число n. Да се намери най-малката възможна стойност на $\max\limits_{0 \le i \le n+1} |3^i - P(i)|$, където P е полином от степен n с реални коефициенти.

Решение. Нека m_P е даденият максимум за P. Избираме $j \in [0, n]$ така, че $m_Q = |3^j - Q(j)|$, където $2Q(x) = P(x+1) - P(x)$ $(\deg Q = n-1)$. Тогава

$$2m_P \ge |3^{j+1} - P(j+1)| + |3^j - P(j)| \ge |3^{j+1} - P(j+1) - 3^j + P(j)| = 2m_Q$$

Също така, при $n = 0$, т.е. $P = c$, имаме, че $2m_P = |3 - c| + |1 - c| \ge 2$. Сега с индукция по n следва, че $m_P \ge 1$.

От друга страна, за

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} 2^k (1 + (-1)^{n-k})$$

лесно се проверява, че $\deg P = n$ и $P(i) = 3^i + (-1)^{n-i}$ при $i \in [0, n+1]$. Следователно за всяко n търсената стойност е 1.

Оценяване. 4 т. за $m_P \ge 1$ и 3 т. за пример (с проверка).